8. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Winter 2024/25

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 8.1 Untersuchen Sie, wo folgende Funktionen nach x bzw. y partiell differenzierbar sind (und wo nicht), und bestimmen Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^y, \text{ wobei } x > 0, \\ g(x,y) &= e^{xy^2}\ln(x^2+y^2), \text{ wobei } (x,y) \neq (0,0), \\ h(x,y) &= \sqrt{x^2+3y^4}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.2 Seien $f, g : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ die Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g(x,y) = y\, f(x,y)\,.$$

Zeigen Sie:

1) f ist bei $(0,0)$ partiell, aber nicht total differenzierbar.
2) g ist (in allen Punkten) total differenzierbar.

Aufgabe 8.3 Sei $A = (a_{ij}) \in I\!R^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und $q : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ die zugehörende quadratische Form

$$q(\bar{x}) = \bar{x} A\, \bar{x}^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j\,.$$

Zeigen Sie: q ist bei jedem $\bar{a} \in I\!R^n$ differenzierbar, und für den Gradienten gilt:

$$\operatorname{grad} q(\bar{a}) = 2\,\bar{a}A$$

Aufgabe 8.4 Sei $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ die Funktion

$$f(x,y) = 3xy^2 + x^2 e^y$$

Bestimmen Sie für den Punkt $\bar{a} = (3,0)$

1) den Gradienten $\operatorname{grad} f(\bar{a})$,
2) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a})$ in Richtung $\bar{v} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Aufgabe 8.5 Berechnen Sie die Tangentialebene $T_{\bar{a}}$ an die Fläche $N_{f(\bar{a})}$ im $I\!R^3$ für folgende Funktionen $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R$ im angegebenen Punkt $\bar{a} \in I\!R^3$.

1) $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - xy - yz\,,\ \bar{a} = (1,2,3)$.
2) $f(x,y,z) = e^x - yz\,,\ \bar{a} = (1,1,e)$.